

Rappel: Ex 1. Série géométrique:  $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \begin{cases} \frac{1}{1-r}, & |r| < 1 \\ \text{divergente}, & |r| \geq 1 \end{cases}$

- 89 -

Ex 2. Série harmonique:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  est divergente.

Ex 3. La série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  est ....

Dém:  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right)}_{2 \cdot \frac{1}{2^2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}\right)}_{2 \cdot \frac{1}{4^2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}\right)}_{2 \cdot \frac{1}{6^2}} + \dots < 1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} =$

$$= 1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2} S_n$$

$$\Rightarrow S_n < 1 + \frac{1}{2} S_n \Rightarrow \frac{1}{2} S_n < 1 \Rightarrow S_n < 2 \quad \forall n \geq 2$$

$\Rightarrow (S_n) \uparrow$  :  $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ . Alors  $(S_n) \uparrow$  et majorée par 2  $\Rightarrow (S_n)$  converge

$\Rightarrow$  La série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  est convergente.

Remarques (1) La série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  est convergente pour tout  $p > 1$  (Série 7)

(2)\*  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \stackrel{\text{(déf)}}{=} \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$  (Euler ~ 1750) (Voir „zeta2.pdf” sur Moodle)

fonction zêta de Riemann.

(3)\* La fonction zêta de Riemann:  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ , convergente  $s > 1$

-90-

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6};$$

difficulté  
croissante

$$\zeta(2k) = C_k (\pi)^{2k}, \quad C_k \in \mathbb{Q}, \quad \zeta(2k) \text{ transcendants } \forall k \in \mathbb{N}^* \text{ (Euler } \sim 1750).$$

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \text{ est transcendant (Apéry } \sim 1979)$$

Au moins une valeur entre  $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$  est irrationnelle.

Hypothèse:  $\zeta(n)$  sont transcendants  $\forall n \geq 2$  naturels. (difficile!!!)

Exercice\*\*:  $\left( \prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \right) \cdot \zeta(s) = 1, \quad s \geq 2 \text{ naturels. Astuce: } \frac{1}{2^s} \zeta(s) = ?$   
(Voir "zêta2.pdf")

Déf Convergence absolue. Une série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  est dite **absolument convergente** si la série  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  est convergente.

Proposition. Une série absolument convergente est convergente.

Dém! Soit  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ ;  $P_n = \sum_{k=0}^n |a_k|$ . On sait que  $(P_n)$  converge

$$\Rightarrow \forall m, n \geq n_0 \Rightarrow \left| S_m - S_n \right| = \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k| = |P_m - P_n| \leq \varepsilon \quad \text{parce que } (P_n) \text{ est une suite de Cauchy}$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall m > n \geq n_0, |S_m - S_n| \leq \varepsilon \Rightarrow (S_n) \text{ est une suite de Cauchy}$$

$$\Rightarrow (S_n) \text{ est convergente. } \square$$

Proposition (Condition nécessaire)

Si la série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Dém:  $(S_n = \sum_{k=1}^n a_k)$  est une suite de Cauchy  $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ :

$\forall m, n \geq n_0 \Rightarrow |S_m - S_n| \leq \varepsilon$ , en particulier  $|S_{n+1} - S_n| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

$$|a_{n+1}| \leq \varepsilon \xRightarrow{\text{dit de limite}} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \square$$

Ex.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{2}$  n'existe pas  $\Rightarrow$  la série diverge.

Remarque.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  n'implique pas la convergence de  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  (Ex:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverge).

§3.2. Critères de convergence.Proposition Critère de Leibnitz pour les séries alternées.

Soit  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  une série telle que:

(1) il existe  $p \in \mathbb{N}$ :  $\forall n \geq p \quad |a_{n+1}| \leq |a_n|$

(2) — " —

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$a_{n+1} \cdot a_n \leq 0 \xleftarrow{\text{dit alternée}} \Rightarrow$

$\Rightarrow$  Alors  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  est convergente

-92-

Dém:  $\forall n \geq p \quad \forall k \in \mathbb{N}, k > 1$  pair

$$S_{n+k} - S_{n-1} = \underbrace{a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+k}}_{\# \text{ impair}} = a_n + \underbrace{(a_{n+1} + a_{n+2})}_{\leq 0 \geq 0} + \dots + \underbrace{(a_{n+k-1} + a_{n+k})}_{\leq 0 \geq 0}$$

$$= \underbrace{(a_n + a_{n+1})}_{\geq 0 \leq 0} + \underbrace{(a_{n+2} + a_{n+3})}_{\geq 0 \leq 0} + \dots + \underbrace{a_{n+k}}_{\geq 0 \leq 0}$$

Si  $a_n > 0$

$a_n < 0$

$$0 \leq a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+k} \leq a_n$$

$$a_n \leq a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+k} \leq 0$$

$$\Rightarrow |a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+k}| \leq |a_n|$$

Mais  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, |a_n| \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow |S_{n+k} - S_{n-1}| \leq |a_n| \leq \varepsilon \quad \forall k > 1, k \text{ pair}$$

$k$  impair : Voir [DZ §3.2.3]

$$\Rightarrow |S_{n+k} - S_{n-1}| \leq \varepsilon \quad \forall k \geq n_0, n_0 \text{ le même pour tout } k \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow (S_n)$  est une suite de Cauchy

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ est convergent.}$$



Ex. Série harmonique alternée :  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$  est convergente par le critère de Leibniz.  
=  $\log 2$  (à voir plus tard).

Proposition Critère de comparaison (pour les séries à termes non-négatifs :  $a_n \geq 0$ )

Soit  $(a_n)$  et  $(b_n)$  deux suites telles que  $\exists k \in \mathbb{N} : 0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \geq k$

Alors : Si  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  converge  $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge.

Si  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  diverge  $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n$  diverge.

Dém: (1) Soit  $S_n = \sum_{i=0}^n a_i$ ,  $P_n = \sum_{i=0}^n b_i \Rightarrow 0 \leq a_i \leq b_i \quad \forall i \geq k$

$$\sum_{i=n+1}^m a_i \leq \sum_{i=n+1}^m b_i \quad \forall m > n \geq k$$

$$0 \leq S_m - S_n \leq P_m - P_n \quad \forall m > n \geq k$$

$\Rightarrow$  Si  $(P_n)$  est une suite de Cauchy  $\Rightarrow (S_n)$  l'est aussi

$\Rightarrow$  Si  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  converge  $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge.

(2) Si  $(S_n)$  divergente  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$  ;  $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq k \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \infty$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n$  est divergente.



Ex.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{(n+1)^2}$  . Considérons  $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\cos(n!)}{(n+1)^2} \right|$

$\Rightarrow \left| \frac{\cos(n!)}{(n+1)^2} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^2} \quad \forall n \in \mathbb{N} ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  convergente.

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\cos(n!)}{(n+1)^2} \right|$  est convergente par le critère de comparaison

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{(n+1)^2}$  est absolument convergente  $\Rightarrow$  convergente.

Remarque. Si  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  possède que de termes **positifs** (**négatifs**), et la suite des sommes partielles est **majorée** (**minorée**), alors la série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  est convergente.

Proposition. Critère de d'Alembert (pour les séries)

Soit  $(a_n)$  une suite :  $a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \in \mathbb{R}$

Alors si  $\rho < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge absolument

si  $\rho > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  diverge.

Idée: comparaison avec une série géométrique (Voir Série 7).

# Proposition Critère de Cauchy (de la racine).

Soit  $(a_n)$  une suite et  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \rho \in \mathbb{R}$ .

Alors si  $\rho < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge absolument

Si  $\rho > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  diverge.

Idee: comparaison avec une série géométrique (Voir Série 7).

Remarques. (1) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \ell \Rightarrow$  forcément  $r = \ell$ .

(2) Parfois  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  existe, mais  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  n'existe pas

(Voir un exemple dans Série 7)

(3) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$  ou  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ , alors pas de conclusion sur la convergence de  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ .

Ex.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ , et la série diverge.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$ , et la série converge.

Ex. (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!} \Rightarrow$  Par d'Alembert :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n+1} = 0.$

Puisque  $0 < 1 \Rightarrow$  la série est convergente.

Remarque.  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{n!} = 0$  par la condition nécessaire.

(2) Série avec paramètre  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$   $x \in \mathbb{R}$  un paramètre.

$\Rightarrow$  Par le critère de d'Alembert :  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{x^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|}{k+1} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  converge absolument  $\forall x \in \mathbb{R}.$

(On verra plus tard que  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$ )

(3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{nx}{3n-1} \right)^{2n-1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  un paramètre.

Par le critère de Cauchy :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{nx}{3n-1} \right|^{\frac{2n-1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{3 - \frac{1}{n}} \right|^{2 - \frac{1}{n}} = \left| \frac{x}{3} \right|^2 = \rho$

$\Rightarrow$  Si  $|x| < 3 \Leftrightarrow \left| \frac{x}{3} \right|^2 < 1 \Rightarrow$  la série converge absolument

Si  $|x| > 3 \Leftrightarrow \left| \frac{x}{3} \right|^2 > 1 \Rightarrow$  la série diverge.

Soit  $x=3 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n}{3n-1} \right)^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{3n}} \right)^{2n-1}$  Condition nécessaire ?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n}{3n-1} \right)^{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left( \frac{3n-1}{3n} \right)^{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( 1 - \frac{1}{3n} \right)}{\left( 1 - \frac{1}{3n} \right)^{2n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( 1 - \frac{1}{3n} \right)^{\rightarrow 0}}{\left( 1 - \frac{1}{3n} \right)^{3n \cdot \frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}} \neq 0} = e^{-\frac{2}{3}} \neq 0$$

Rappel:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^n = \frac{1}{e}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n}{3n-1} \right)^{2n-1} \text{ diverge.}$$

$$\text{Soit } x = -3 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-3n}{3n-1} \right)^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{2n-1}}_{=-1} \left( \frac{3n}{3n-1} \right)^{2n-1} = - \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left( \frac{3n}{3n-1} \right)^{2n-1}}_{\text{divergente.}}$$

$$\Rightarrow \text{Conclusion: } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{nx}{3n-1} \right)^{2n-1}$$

converge absolument si  $|x| < 3$

diverge si  $|x| \geq 3$ .